

CHƯƠNG I. DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

§1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. Kiến thức cần nhớ

Nếu chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương n , ta thực hiện như sau:

- Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$.
- Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương $n = k$ tùy ý ($k \geq 1$), chứng minh rằng mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Chú ý: Nếu phải chứng minh mệnh đề $A(n)$ là đúng với mọi số nguyên dương $n \geq p$ thì:

- + Ở bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$;
- + Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương bất kì $n = k \geq p$ và phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

B. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Chứng minh: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Giải

Bước 1: Khi $n = 1$, vế trái chỉ có một số hạng bằng 1, vế phải bằng 1^2 , vậy hệ thức (1) đúng.

Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2 \text{ (giả thiết quy nạp)}$$

Ta chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2 \quad (*)$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

vế trái của (*): $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = k^2 + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2 =$ vế phải của (*)

Vậy hệ thức (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$: $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Giải

Với $n = 1$, ta có: $1^3 + 11 \cdot 1 = 12$ chia hết cho 6.

Ta phải chứng minh tính chất đúng với $n = k + 1$. Thật vậy:

$$(k + 1)^3 + 11(k + 1) = k^3 + 11k + 12 + 3k(k + 1).$$

Vì $k^3 + 11k + 12$ chia hết cho 6 và $k(k+1)$ là số chẵn nên $3k(k+1)$ chia hết cho 6.

$\Rightarrow k^3 + 11k + 12 + 3k(k+1)$ chia hết cho 6 hay tính chất đúng với $n = k+1$.

Vậy tính chất trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI TẬP:

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

d) $1.4 + 2.7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$

e) $1.2 + 2.3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

f) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $2^n > 2n+1 \quad (n \geq 3)$

b) $2^{n+2} > 2n+5$

c) $1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad (n \geq 2)$

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

e) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

f) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad (n > 1)$

Bài 3: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

b) $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

c) $7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5.

d) $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

e) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7.

f) $13^n - 1$ chia hết cho 6.

§ 2. DẪY SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Dãy số

$$\begin{aligned} u: \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

Dạng khai triển: $(u_n) = u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$

2. Dãy số tăng, dãy số giảm

- (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
 $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$
 $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ($u_n > 0$).
- (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
 $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$
 $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ($u_n > 0$).

3. Dãy số bị chặn

- (u_n) là dãy số bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} : u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Bài tập áp dụng

Bài tập 1: Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi công thức:

$$u_n = \frac{n}{2^n - 1}$$

Giải

$$u_1 = \frac{1}{2^1 - 1} = 1; u_2 = \frac{2}{2^2 - 1} = \frac{2}{3}; u_3 = \frac{3}{2^3 - 1} = \frac{3}{7}; u_4 = \frac{4}{2^4 - 1} = \frac{4}{15}; u_5 = \frac{5}{2^5 - 1} = \frac{5}{31}$$

Bài tập 2: Tìm số hạng tổng quát của dãy số:

a) $(u_n) : 1; 2; 4; 8; 16.$

b) $(u_n) : \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

Giải

a) Ta thấy:

$$u_1 = 1 = 2^{1-1}; u_2 = 2 = 2^{2-1}; u_3 = 4 = 2^{3-1}; u_4 = 8 = 2^{4-1}; u_5 = 16 = 2^{5-1} \Rightarrow u_n = 2^{n-1}$$

Vậy dãy (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 2^{n-1}$.

b) Ta thấy $u_1 = 3; u_2 = 2u_1 = 2.3 = 3.2^1; u_3 = 2u_2 = 2.6 = 3.2^2; u_4 = 2u_3 = 2.12 = 3.2^3$

Vậy dãy (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 3.2^{n-1}$

BÀI TẬP**Bài 1:** Hãy viết 5 số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$

b) $u_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + 1}$

c) $u_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$

d) $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

e) $u_n = n + \cos^2 n$

f) $u_n = \frac{(n+1)!}{2^n}$

Bài 2: Hãy viết 5 số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1)$

b) $u_1 = 15, u_2 = 9, u_{n+2} = u_n - u_{n+1}$

c) $u_1 = 0, u_{n+1} = \frac{2}{u_n^2 + 1}$

d) $u_1 = 1, u_2 = -2, u_{n+2} = u_{n+1} - 2u_n$

Bài 3: Hãy viết 5 số hạng đầu của dãy số (u_n) , dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh công thức đó bằng qui nạp:

a) $u_1 = 1, u_{n+1} = 2u_n + 3$

b) $u_1 = 3, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$

c) $u_1 = 3, u_{n+1} = 2u_n$

d) $u_1 = -1, u_{n+1} = 2u_n + 1$

e) $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + 7$

e) $u_1 = \frac{5}{4}, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$

Bài 4: Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n = \frac{2n+1}{3n-2}$

b) $u_n = \frac{4^n - 1}{4^n + 5}$

c) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$

d) $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 1}$

e) $u_n = n + \cos^2 n$

f) $u_n = \frac{2-n}{\sqrt{n}}$

Bài 5: Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n = \frac{2n+3}{n+2}$

b) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

c) $u_n = n^2 + 4$

d) $u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$

e) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n + n}}$

f) $u_n = (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n}$

§3. CẤP SỐ CỘNG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa: (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (d : công sai)

2. Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n-1)d$ với $n \geq 2$

3. Tính chất các số hạng: $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với $k \geq 2$

4. Tổng n số hạng đầu tiên:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$

B. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Xác định cấp số cộng (u_n) biết:

$$u_5 = 19; u_9 = 35$$

Giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19(1) \\ u_1 + 8d = 35(2) \end{cases}$$

Lấy (2) trừ đi (1): $4d = 16 \Rightarrow d = 4$.

Thế vào (1): $u_1 = 3$. Vậy $u_1 = 3, d = 4$.

BÀI TẬP

Bài 1: Trong các dãy số (u_n) dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng, khi đó cho biết số hạng đầu và công sai của nó:

a) $u_n = 3n - 7$

b) $u_n = \frac{3n+2}{5}$

c) $u_n = n^2$

d) $u_n = 3^n$

e) $u_n = \frac{7-3n}{2}$

f) $u_n = \frac{n}{2} - 1$

Bài 2: Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_3 = -15 \\ u_{14} = 18 \end{cases}$

d)
$$\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} u_1 + u_3 + u_5 = -12 \\ u_1 u_2 u_3 = 8 \end{cases}$$

Bài 3: a) Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng.
b) Giữa các số 4 và 67 hãy đặt thêm 20 số nữa để được một cấp số cộng.

Bài 4: a) Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng là 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.
b) Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 22 và tổng các bình phương của chúng bằng 66.

Bài 5: a) Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm số đo các góc đó.
b) Số đo các góc của một đa giác lồi có 9 cạnh lập thành một cấp số cộng có công sai $d = 3^\circ$. Tìm số đo của các góc đó.
c) Số đo các góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số cộng và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất. Tìm số đo các góc đó.

Bài 6: Chứng minh rằng nếu 3 số a, b, c lập thành một cấp số cộng thì các số x, y, z cũng lập thành một cấp số cộng, với:

a) $x = b^2 + bc + c^2; y = c^2 + ca + a^2; z = a^2 + ab + b^2$

b) $x = a^2 - bc; y = b^2 - ca; z = c^2 - ab$

Bài 7: Tìm x để 3 số a, b, c lập thành một cấp số cộng, với:

a) $a = 10 - 3x; b = 2x^2 + 3; c = 7 - 4x$ b) $a = x + 1; b = 3x - 2; c = x^2 - 1$

§4. CẤP SỐ NHÂN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa:	(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \cdot q$ với $n \in N^*$ (q : công bội)
2. Số hạng tổng quát:	$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ với $n \geq 2$
3. Tính chất các số hạng:	$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$ với $k \geq 2$
4. Tổng n số hạng đầu tiên:	$\begin{cases} S_n = nu_1 & \text{với } q = 1 \\ S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{với } q \neq 1 \end{cases}$

B. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 \cdot q^3 - u_1 \cdot q = 72 \\ u_1 \cdot q^4 - u_1 \cdot q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q \cdot (q^2 - 1) = 72 & (1) \\ u_1 q^2 \cdot (q^2 - 1) = 144 & (2) \end{cases}$$

Chia (2) cho (1) ta có: $q = 2$.

$$\text{Thế vào (1) ta có: } u_1 = \frac{72}{2 \cdot (2^2 - 1)} = 12.$$

Vậy $u_1 = 12; q = 2$.

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{d) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12} \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases}$$

Bài 2: a) Giữa các số 160 và 5 hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.
b) Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

Bài 3: Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Bài 4: a) Tìm số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng công bội là 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối là 486.

b) Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Bài 5: a) Tìm 4 góc của một tứ giác, biết rằng các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai.

b) Độ dài các cạnh của $\triangle ABC$ lập thành một cấp số nhân.

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ có hai góc không quá 60° .

Bài 6: Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

Bài 7: Số số hạng của một cấp số nhân là một số chẵn. Tổng tất cả các số hạng của nó lớn gấp 3 lần tổng các số hạng có chỉ số lẻ. Xác định công bội của cấp số đó.

Bài 8: Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\frac{148}{9}$, đồng thời theo thứ tự chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

Bài 9: Tìm 3 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng khi tăng số thứ hai thêm 2 thì các số đó tạo thành một cấp số cộng, còn nếu sau đó tăng số cuối thêm 9 thì chúng lại lập thành một cấp số nhân.

Bài 10: Tìm 4 số trong đó ba số đầu là ba số hạng kế tiếp của một cấp số nhân, còn ba số sau là ba số hạng kế tiếp của một cấp số cộng; tổng hai số đầu và cuối bằng 32, tổng hai số giữa bằng 24.

Bài 11: Tìm các số dương a và b sao cho a, $a + 2b$, $2a + b$ lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2$, $ab + 5$, $(a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Bài 12: Chứng minh rằng nếu 3 số $\frac{2}{y-x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{2}{y-z}$ lập thành một cấp số cộng thì 3 số x, y, z lập thành một cấp số nhân.

CHƯƠNG 2. GIỚI HẠN

§ 5. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa 1. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ hay } u_n \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty$$

Như vậy, (u_n) có giới hạn là 0 khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n có thể gần 0 bao nhiêu cũng được, miễn n đủ lớn.

Định nghĩa 2. Ta nói dãy (v_n) có giới hạn là số a (hay v_n dần tới a) khi $n \rightarrow +\infty$, nếu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - a) = 0.$$

Kí hiệu:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a \text{ hay } v_n \rightarrow a \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

2. Các giới hạn đặc biệt

Từ định nghĩa suy ra các kết quả sau:

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0; \text{ với } k \text{ nguyên dương;}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \text{ nếu } |q| < 1;$$

$$c) \text{ Nếu } u_n = c \text{ (} c \text{ là hằng số) thì } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c = c.$$

▪ **Ghi chú**

Từ nay về sau thay cho viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, ta có thể viết tắt là: $\lim u_n = a$.

II. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Việc tính giới hạn bằng định nghĩa khá phức tạp nên người ta thường áp dụng các công thức giới hạn đặc biệt nêu trên và định lý sau đây mà ta thừa nhận.

Định lý 1

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$
- $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{a}{b}$ (Nếu $b \neq 0$)

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

III. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cho cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q , với $|q| < 1$ **tổng của cấp số nhân lùi vô hạn** (u_n) là:

$$S = \frac{u_1}{1 - q}$$

Chẳng hạn: Hai dãy số sau đây là những cấp số nhân lùi vô hạn:

- Dãy số: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ với công bội $q = \frac{1}{2}$;
- Dãy số: $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots, \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \dots$ với công bội $q = -\frac{1}{3}$.

Ví dụ 1:

a) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , với $u_n = \frac{1}{3^n}$.

b) Tính tổng: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$

Giải

a) Vì $u_n = \frac{1}{3^n} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{3}; q = \frac{1}{3}$. Do đó

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

b) Các số hạng của tổng lập thành cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1, q = -\frac{1}{2}$.

Vậy

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Định nghĩa

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu:

$$\lim u_n = +\infty \text{ hay } u_n \rightarrow +\infty \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu:

$$\lim u_n = -\infty \text{ hay } u_n \rightarrow -\infty \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Nhận xét

$$\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty.$$

2. Một vài giới hạn đặc biệt

Ta thừa nhận định lí dưới đây:

- $\lim n^k = +\infty$ ($k \in \mathbb{N}^*$)
- $\lim q^n = +\infty$ nếu ($q > 1$)

3. Định lí

Định lí 2

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$; $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim(u_n \cdot v_n) = +\infty$

B. BÀI TẬP Ứ DỤNG**Ví dụ 1:** Tính

$$\lim \frac{5n + 7}{-2n + 1}$$

Giải

Chia cả tử số và mẫu số cho n , ta được

$$\frac{5n + 7}{-2n + 1} = \frac{5 + \frac{7}{n}}{-2 + \frac{1}{n}}$$

$$\text{Vì } \lim \left(5 + \frac{7}{n} \right) = \lim 5 + \lim \frac{7}{n} = 5 + 0 = 5$$

$$\text{Và } \lim \left(-2 + \frac{1}{n} \right) = \lim(-2) + \lim \frac{1}{n} = -2 + 0 = -2$$

$$\text{nên } \lim \frac{5n + 7}{-2n + 1} = \lim \frac{5 + \frac{7}{n}}{-2 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim \left(5 + \frac{7}{n} \right)}{\lim \left(-2 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{5}{-2}$$

Ví dụ 2: Tính

$$\lim \frac{3n^2 - n}{n^2 + 1}$$

Giải

Chia cả tử số và mẫu số cho n^2 , ta được

$$\frac{3n^2 - n}{n^2 + 1} = \frac{3 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1}$$

$$\text{Vì } \lim \left(3 - \frac{1}{n} \right) = \lim 3 - \lim \frac{1}{n} = 3 - 0 = 3$$

$$\text{Và } \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1 \right) = \lim \frac{1}{n} \cdot \lim \frac{1}{n} + \lim 1 = 0 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$\text{nên } \lim \frac{3n^2 - n}{n^2 + 1} = \lim \frac{3 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1} = \frac{\lim \left(3 - \frac{1}{n} \right)}{\lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1 \right)} = \frac{3}{1} = 3$$

Ví dụ 3: Tính

$$\lim \frac{\sqrt{1 + 4n^2}}{1 - 2n}$$

Giải

Ta có:

$$\lim \frac{\sqrt{1 + 4n^2}}{1 - 2n} = \lim \frac{\sqrt{n^2 \left(\frac{1}{n^2} + 4 \right)}}{1 - 2n} = \lim \frac{n \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2} + 4}}{n \cdot \left(\frac{1}{n} - 2 \right)} = \lim \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 4}}{\left(\frac{1}{n} - 2 \right)} = \frac{2}{-2} = -1$$

Ví dụ 4: Tính

$$\lim \frac{2n + 5}{n \cdot 3^n}$$

Giải

Chia cả tử và mẫu cho n , ta được

$$\frac{2n+5}{n \cdot 3^n} = \frac{2+\frac{5}{n}}{3^n}$$

$$\text{Vì } \lim \left(2 + \frac{5}{n}\right) = 2; \lim(3^n) = +\infty \Rightarrow \lim \frac{2n+5}{n \cdot 3^n} = \lim \frac{2+\frac{5}{n}}{3^n} = 0.$$

Ví dụ 5: Tính

$$\lim(n^2 - 2n - 1)$$

Giải

Ta có

$$n^2 - 2n - 1 = n^2 \left(1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right)$$

$$\text{Vì } \lim n^2 = +\infty; \lim \left(1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = 1 > 0$$

$$\Rightarrow \lim(n^2 - 2n - 1) = \lim n^2 \left(1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = +\infty.$$

C. BÀI TẬP

1. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim \frac{6n-1}{3n+2};$$

$$b) \lim \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1};$$

$$c) \lim \frac{3^n + 5 \cdot 4^n}{4^n + 2^n};$$

$$d) \lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2}$$

2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1);$

b) $\lim(-n^2 + 5n - 2);$

c) $\lim(\sqrt{n^2 - n} - n);$

d) $\lim(\sqrt{n^2 - n} + n).$

3. Tính

$$S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \dots$$

4.. Tính

$$S = \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \dots$$

5. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 1,020\,202\,\dots$ (chu kì 02). Hãy viết a dưới dạng một phân số.

§ 6. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là L (khi x dần tới x_0 , nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Nhận xét:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad (c \text{ là hằng số})$$

2. Định lí về giới hạn hữu hạn

Ta thừa nhận định lí sau đây:

Định lí 1:

a) Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$, ta có:

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$$

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$$

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} ; (M \neq 0)$$

$$b) \text{ Nếu } f(x) \geq 0; \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ thì } L \geq 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng đang tìm giới hạn, với $x \neq x_0$).

3. Giới hạn một bên

Định nghĩa 2:

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x_n \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x_n \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

Ta thừa nhận định lí sau:

Định lí 2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 5x + 2 & \text{nếu } x \geq 1 \\ x^2 - 3 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$

Tìm

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x); \quad \text{và } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad (\text{nếu có}).$$

Giải.

Ta có.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 3) = 1^2 - 3 = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x + 2) = 7.$$

Như vậy

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ không tồn tại.}$$

II. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa 3:

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

▪ **Chú ý:**

Với c, k là hằng số, $k \in \mathbb{N}^*$, ta luôn có:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c ; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$$

Ví dụ 3: Tính

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1}$$

Giải

Chia cả tử và mẫu cho x^2 , ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{2}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3$$

III. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn vô cực

Định nghĩa 4

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số $-\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow -\infty$.

Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Nhận xét:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = -\infty$$

2. Một vài giới hạn đặc biệt

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ nếu k số lẻ
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn

3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$

$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

3. Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+\infty$	$+\infty$
		$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$		$+\infty$	$-\infty$
		$-\infty$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp

$$x \rightarrow x_0^+; x \rightarrow x_0^-; x \rightarrow +\infty; x \rightarrow -\infty$$

4. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Ví dụ 1: Tính

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$$

Giải:

Theo định lí về giới hạn ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2+1}{\lim_{x \rightarrow 3} 2\sqrt{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} 2 \cdot \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} x}} = \frac{3 \cdot 3 + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 2: Tính

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$$

Giải:

Vì $(x - 1) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow 1$, nên ta chưa thể áp dụng được định lí nêu trên.

Nhưng với $x \neq 1$ ta có

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 4)}{x - 1} = x + 4$$

Do đó

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4) = 5.$$

Ví dụ 3: Tính

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x)$$

Giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = 1 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = -\infty.$$

Ví dụ 4: Tính

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{x - 1};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1}$$

Giải

a) Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0, x - 1 < 0 \text{ với mọi } x < 1 \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 3) = 2.1 - 3 = -1 < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{x - 1} = +\infty.$$

b) Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0, x - 1 > 0 \text{ với mọi } x > 1 \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 3) = 2.1 - 3 = -1 < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1} = -\infty.$$

C. BÀI TẬP

1. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 6}{4 - x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{3 + x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{17}{x^2 + 1};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 1}{x + 1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6};$$

2. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 5}{(x - 2)^2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 7}{x - 1};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 7}{x - 1};$$

3. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^2 + x - 1);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{5 - 2x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{17}{x^2 + 1};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - 5)$$

4. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^4 - x^3 + x^2 + x - 2};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 7}{x^2 + 1};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{x}}{x-1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{2x};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x);$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{5 - 2x};$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x - 1)$$

§7. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục tại x_0** nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

II. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa 2

*. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu hàm số liên tục tại $x_0, \forall x_0 \in (a; b)$

*. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu hàm số liên tục trên khoảng $(a; b)$ và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ và } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

III. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

- Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$
- Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.
- Giả sử các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại x_0 thì
 - + Hàm số $y = f(x) + g(x); y = f(x) - g(x); y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0
 - + Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm x_0 (nếu $g(x) \neq 0$)

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$

B. BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài toán 1: Hàm số liên tục tại một điểm

Phương pháp:

Để chứng minh hàm số $f(x)$ liên tục tại một điểm x_0 , ta qua 3 bước sau đây:

B_1 : Tính $f(x_0)$

B_2 : Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

B_3 : So sánh $f(x_0)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì kết luận $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$

Ví dụ 1: Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = 2$

Giải

Ta có:

* Tính $f(x_0) = f(2) = 4$

$$* \text{ Tính } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

Do đó:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

Vậy $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 2$

Ví dụ 2: Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 1, & x < 1 \\ 3x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$

Giải

Ta có:

$$* \text{ Tính } f(x_0) = f(1) = 3.1 + 2 = 5$$

$$* \text{ Tính } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x + 2) = 3.1 + 2 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - x + 1) = 1$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ không tồn tại

Vậy $f(x)$ không liên tục tại điểm $x = 1$

Ví dụ 3: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \frac{x}{x-2}$ tại $x_0 = 3$.

Giải

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Do đó xác định trên khoảng $(2; +\infty)$ chứa $x_0 = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-2} = 3 = f(3)$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = 3$.

Bài toán 2: Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn

Phương pháp:

1/ Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b) \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng $(a; b)$.

2/ / Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a); \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

Ví dụ 4: Xét tính liên tục của hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x-3}; & x \neq 3 \\ 4; & x = 3 \end{cases}$

trên tập xác định của nó.

Giải

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là : $D = \mathbb{R}$

- Nếu $x \neq 3$ thì $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$

Vì $f(x)$ là thương của 2 đa thức, đồng thời mẫu số $x - 3 \neq 0; \forall x \neq 3$ nên $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$

- Tại $x = 3$. Ta có $f(3) = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 1)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 1) = 4$$

Do đó:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

Suy ra $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 3$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}; & x \neq 1 \\ 5; & x = 1 \end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

Giải

Tập xác định của hàm số là: $\mathbb{R}..$

- Nếu $x \neq 1$, thì $f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$.

Đây là hàm số phân thức hữu tỉ có tập xác định là: $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

- Nếu $x = 1$ ta có $f(x) = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1).$$

Suy ra hàm số đã cho không liên tục tại $x = 1$.

Kết luận: Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$; $(1; +\infty)$ và gián đoạn tại $x = 1$.

Bài toán 3: Chứng minh phương trình có nghiệm nhờ tính liên tục của hàm số

Phương pháp:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$

Ví dụ 6: Chứng minh rằng phương trình: $x^3 + 3x^2 + 5x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(0; 1)$

Giải

Xét hàm số: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 1$

Ta có $f(x)$ là đa thức nên liên tục trên đoạn $[0; 1]$

Mặt khác: $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 8 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(0; 1)$.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 2x^2 - 5 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$.

Ta có: $\begin{cases} f(0) = -5 \\ f(2) = 7 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(2) < 0.$

$y = f(x)$ là hàm số đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó, nó liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (0; 2)$.

C. BÀI TẬP

1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 2$, biết

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}; & x \neq 2 \\ 5; & x = 2 \end{cases}$$

2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 1$, biết

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - 3}{x + 1}; & x \neq 1 \\ -1; & x = 1 \end{cases}$$

3. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} e^x; & x < 0 \\ a + x; & x \geq 0 \end{cases}$$

Với giá trị nào của a thì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

4. Tìm a để hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1}; & x \neq 1 \\ 3x + 3; & x = 1 \end{cases}$$

liên tục tại $x = 1$.

5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ trên tập xác định của nó, biết

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}; & x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}; & x = \sqrt{2} \end{cases}$$

6. Chứng minh rằng phương trình: $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt trên khoảng $(-1; 1)$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim \frac{8n+1}{2n+5};$$

$$b) \lim \frac{n^3+n-2}{2n^3-1};$$

$$c) \lim \frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2};$$

$$d) \lim (\sqrt{n^2+5n-1}-n);$$

$$e) \lim \frac{1}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}};$$

$$f) \lim \frac{2^n-75^n}{5^n+3^n};$$

2. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x-1}{2x+9};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3+3x+1}{2x^3-1};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2-7x+1);$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+5x-1}-x);$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^2-10x+5}{x-1};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+3x^2+2x}{x+2};$$

3. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{9+x+x^2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3+x^2-2x+1);$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+4}-x}{3x-1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{3x-1};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+2}{3x+7};$$

4. Xét tính liên tục trên $\mathbb{R}$ của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}; & x > 2 \\ 5 - x; & x \leq 2 \end{cases}$$

5. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x}{\sqrt{x + 1} - 2}; & x \neq 3 \\ a; & x = 3 \end{cases}$$

Với giá trị nào của a thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

6. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 5)$.

Chương III. ĐẠO HÀM

§ 8. ĐẠO HÀM VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm:

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là **đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0** và kí hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

CHÚ Ý:

Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của đối số tại x_0 .

Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là **số gia tương ứng của hàm số**. Như vậy:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa:

Quy tắc:

Bước 1: Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0 , tính:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Bước 2: Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3: Tìm $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ tại $x_0 = 1$

Giải

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 1$

Ta có: $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1 + \Delta x} - 1 = \frac{-\Delta x}{1 + \Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-1}{1 + \Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \Delta x} = -1 \end{aligned}$$

Vậy $f'(1) = -1$

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Định lý 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đó. Ta có:

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng với hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

4. Phương trình tiếp tuyến:

Định lý 2

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$
 trong đó $y_0 = f(x_0)$.

Ví dụ 3: Cho parabol $y = -x^2 + 3x - 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.

Giải

Ta có: $x_0 = 2$

$$y_0 = y(2) = 0.$$

Bằng định nghĩa ta tính được: $y'(x_0) = y'(2) = -1$

Vậy phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm $M_0(2; 0)$ là

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \\ \Leftrightarrow y - 0 &= (-1)(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 2. \end{aligned}$$

B. BÀI TẬP

1. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm đã chỉ ra :
 - a) $y = x^2 - 3x$ tại $x_0 = 2$
 - b) $y = x^3 + 1$ tại $x_0 = -2$
 - c) $y = \frac{2}{x}$ tại $x_0 = 3$
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 1$
 - a) Tại điểm $(-1; 0)$
 - b) Tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$
 - c) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 12
3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{2}{x}$
 - d) Tại điểm $(-1; -2)$
 - e) Tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$
 - f) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 8

§9. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT

I. Đạo hàm của một số hàm thường gặp

1. Định lí 1

Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Nhận xét :

- Đạo hàm của hàm hằng bằng 0 : $(C)' = 0$

- Đạo hàm của hàm số $y = x$ bằng 1 : $(x)' = 1$

2. Định lí 2

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi $x > 0$ và

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

II. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương:

1. **Định lí 3:** Giả sử $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định.

Ta có :

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$$

Bằng quy nạp toán học ta chứng minh được :

$$(u_1 \pm u_2 \pm \dots \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm \dots \pm u_n'$$

Ví dụ 1:

Tính đạo hàm các hàm số :

a) $y = x^3 + x^2 - x^5$

b) $y = \frac{x^2 + x}{x-1}$

Giải

a) Ta có : $(x^3 + x^2 - x^5)' = (x^3)' + (x^2)' - (x^5)'$
 $= 3x^2 + 2x - 5x^4$

b) Ta có :

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{x}} \right)' &= \frac{(x^2 - 1)' x\sqrt{x} - (x^2 - 1)(x\sqrt{x})'}{(x\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{2x^2\sqrt{x} - (x^2 - 1)(1\sqrt{x} + x\frac{1}{2\sqrt{x}})}{x^3} \\ &= \frac{2x^2\sqrt{x} - x^2\sqrt{x} - \frac{x^2\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}}{x^3} \\ &= \frac{x^2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}}{2x^3} \end{aligned}$$

2. Hệ quả:

$$1. (ku)' = ku' \quad (k \text{ là hằng số})$$

$$2. \left(\frac{1}{v} \right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$$

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm của hàm số: $y = \frac{5}{1-2x^2}$

Giải

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(\frac{5}{1-2x^2} \right)' = 5 \left(\frac{1}{1-2x^2} \right)' \\
 &= 5 \left(- \frac{(1-2x^2)'}{(1-2x^2)^2} \right) = 5 \left(- \frac{(-4x)}{(1-2x^2)^2} \right) = \frac{20x}{(1-2x^2)^2}
 \end{aligned}$$

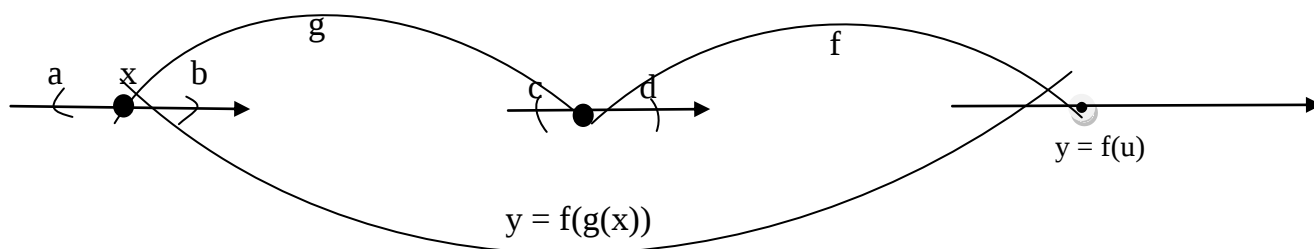
III. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

1. Hàm hợp: Giả sử hàm số $u = g(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và lấy giá trị trên khoảng $(c;d)$;

Hàm số $y = f(u)$ xác định trên $(c;d)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$. Khi đó, ta lập một hàm số xác định trên khoảng $(a;b)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ theo quy tắc :

$$x \rightarrow f(g(x))$$

Ta gọi $y = f(g(x))$ là hàm hợp của hàm $y = f(u)$ với hàm $u = g(x)$.



Ví dụ 3: Hàm số $y = \sin(2x + 3)$ là hàm hợp của hàm $y = f(u) = \sin u$ và hàm $u = g(x) = 2x + 3$

2. Định lí 4. Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là :

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Ví dụ 4: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sin(2x + 3)$ (xem $u = 2x + 3$)

Giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } y' &= (\sin(2x + 3))'_x = \cos(2x + 3) \cdot (2x + 3)'_x \\
 &= \cos(2x + 3) \cdot 2 \\
 &= 2 \cos(2x + 3).
 \end{aligned}$$

Bảng tóm tắt

$$(u + v + w)' = u' + v' + w'$$

$$(k.u)' = k.u'$$

$$(u.v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

B. BÀI TẬP

1. Tìm đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 9$

b) $y = 4x^5(x^3 - 2x^2 + 5)$

c) $y = (2x^4 + 9x)\sqrt{x}$

d) $y = \frac{4 + 2x^2}{3x - 1}$

e) $y = \sqrt{3x^2 - 2x}$

f) $y = \frac{1 + 2x}{\sqrt{4 + x^2}}$

g) $y = (1 + x)^4$

h) $y = \frac{7}{2 + x^2}$

2. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$

a) Tìm $y'(-3)$

b) Tìm x để $y' > 0$

§ 10. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. LÝ THUYẾT:

1. Giới hạn của $\frac{\sin x}{x}$

Định lí 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Ví dụ 1: Tính

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

Định lí 2

Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và
 $(\sin x)' = \cos x$

Chú ý:

Nếu $u = u(x)$ thì

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

Ví dụ 2:

Tính đạo hàm: $(\sin(x^2 + 1))' = (x^2 + 1)' \cos(x^2 + 1) = 2x \cdot \cos(x^2 + 1)$

3. Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Định lí 3

Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và
 $(\cos x)' = -\sin x$

Chú ý:

Nếu $u = u(x)$ thì

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm: $(\cos(3x))' = -(3x)' \cdot \sin(3x) = -3 \cdot \sin(3x)$.

4. Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$

Định lí 4

Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Chú ý:

Nếu $u = u(x)$ thì

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm: $(\tan(2x + \frac{\pi}{3}))' = \frac{(2x + \frac{\pi}{3})'}{\cos^2(2x + \frac{\pi}{3})} = \frac{2}{\cos^2(x + \frac{\pi}{3})}$

5. Đạo hàm của hàm số $y = \cot x$

Định lí 5

Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Chú ý:

Nếu $u = u(x)$ thì

$$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm :

$$(\cot(3x - \frac{\pi}{4}))' = -\frac{(3x - \frac{\pi}{4})'}{\sin^2(3x - \frac{\pi}{4})} = -\frac{3}{\sin^2(3x - \frac{\pi}{4})}$$

BẢNG ĐẠO HÀM

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(u^n)' = nu^{n-1}$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(\sin u)' = u' \cos u$ $(\cos u)' = -u' \sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
--	--

B. BÀI TẬP

Bài tập 1: Tìm đạo hàm các hàm số lượng giác sau :

a) $y = \sin 3x - \cos \frac{x}{2}$

b) $y = \frac{\sin x - 2 \cos x}{\cos 5x + \sin x}$

c) $y = \sqrt{1 + \tan x}$

d) $y = \sin^2 x$

e) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$

f) $y = \cot x^3$

g) $y = \sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2(\frac{\pi}{3} - x) + \sin^2(\frac{2\pi}{3} + x)$

§ 11. VI PHÂN

A. LÝ THUYẾT

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a;b)$. Giả sử Δx là số gia của x .

Ta gọi $f'(x).\Delta x$ là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x ứng với số gia Δx . Kí hiệu là $df(x)$ hoặc dy , nghĩa là :

$$dy = df(x) = f'(x).\Delta x$$

Chú ý:

Áp dụng định nghĩa trên vào hàm số $y = x$

$$\text{Ta có : } dx = (x)' . \Delta x = 1 . \Delta x = \Delta x$$

Do đó, với hàm số $y = f(x)$ ta có:

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

Ví dụ 1: Tìm vi phân hàm số sau:

a) $y = x^3 + 3x^2 - 5x$

b) $y = \cos^2 x$

Giải

a) $y = x^3 + 3x^2 - 5x \rightarrow y' = 3x^2 + 6x - 5$

Vậy: $dy = (3x^2 + 6x - 5)dx$

b) $y = \cos^2 x \rightarrow y' = -2\sin x . \cos x = \sin(2x)$

Vậy: $dy = \sin(2x)dx$.

B. BÀI TẬP

Bài tập 1: Tìm dy biết:

a) $y = \tan^2 x$

b) $y = 4x^3 - 2x^2 + 4$

c) $y = \cos^3 x - \sin 2x$

§12. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A. LÝ THUYẾT

Định nghĩa: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a;b)$. Khi đó, hệ thức $y' = f'(x)$ là một hàm số mới trên khoảng $(a;b)$.

Nếu hàm số $y' = f'(x)$ có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x và kí hiệu là: y'' hoặc $f''(x)$.

Chú ý: - Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y = f(x)$ được định nghĩa tương tự và kí hiệu là y''' hoặc $f'''(x)$ hoặc $f^{(3)}(x)$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp $n-1$, kí hiệu là $f^{(n-1)}(x)$ ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 4$)

Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$. Kí hiệu là: $y^{(n)}(x)$ hoặc $f^{(n)}(x)$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Ví dụ 1:

Cho $y = x^5$ thì $y' = 5x^4$; $y'' = 20x^3$; $y''' = 60x^2$

B. BÀI TẬP

Bài tập 1: Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số :

$$a) y = \frac{2}{4+x}$$

$$b) y = \sin 2x$$

$$c) y = \cos^2 x$$

$$d) y = (x+5)^{10}$$

$$e) y = x(x^2 + 2x - 3)$$

CHƯƠNG IV. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ.

§13. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

I. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1. Nhắc lại định nghĩa

Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn (nửa khoảng). Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K . Ta nói:

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc K mà x_1 nhỏ hơn x_2 thì $f(x_1)$ nhỏ hơn $f(x_2)$, tức là

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc K mà x_1 nhỏ hơn x_2 thì $f(x_1)$ lớn hơn $f(x_2)$, tức là

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là **đơn điệu trên K** .

2. Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Ta thừa nhận định lí sau đây

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .

b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .

II - QUY TẮC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1. Quy tắc

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$
2. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
3. Sắp xếp các điểm đó theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
4. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

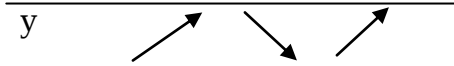
2. Áp dụng

Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

Giải:

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
- $y' = 3x^2 - 3$.
- $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.
- BBT:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0



Kết luận: Hàm số *ngược biến* trên khoảng $(-1;1)$ và *đồng biến* trên khoảng $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$

BÀI TẬP

Bài 1: Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

b. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

c. $y = \frac{x+1}{2x-5}$

d. $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 2$

e. $y = \frac{3x+1}{1-x}$

f. $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$

§14. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. KHÁI NIỆM CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$ và điểm $x_0 \in (a; b)$).

a) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .

b) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

Điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và cực tiểu được gọi chung là cực trị.

II. ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

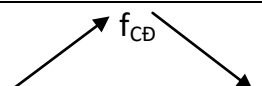
Ta thừa nhận định lý sau đây

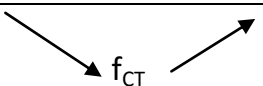
Định lý 1

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$ với $h > 0$.

a) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$

b) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$

X	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

III. QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ

QUY TẮC I

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$
2. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
3. Lập bảng biến thiên.
4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Ví dụ 1: Tìm các điểm cực trị của các hàm số $y = x^3 - 3x + 1$

Giải:

$$D = \mathbb{R}$$

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y			3	-1		

$x = -1$ là điểm cực đại

$x = 1$ là điểm cực tiểu

Định lí 2:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

a) Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

b) Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Áp dụng Định lí 2, ta có quy tắc sau đây để tìm các điểm cực trị của một hàm số.

QUY TẮC II

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$.

2. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i (i=1,2,3,\dots)$ là các nghiệm của nó.

3. Tính $f'(x)$ và, $f''(x_i)$

4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm số Tìm các điểm cực trị của hàm số

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

Giải

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1; x = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f''(\pm 1) = 8 > 0 \Rightarrow x = -1 \text{ và } x = 1 \text{ là hai điểm cực tiểu}$$

$$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ là điểm cực đại}$$

BÀI TẬP

1. Áp dụng quy tắc I tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a. $y = x^2 - 4x + 3$

b. $y = x^4 - 2x^2 + 1$

2. Áp dụng quy tắc II, tìm điểm cực trị của các hàm số sau:

a. $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$

§15. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

a) Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) < M$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao

$$\text{cho } f(x_0) = M.$$

$$\text{Kí hiệu } M = \max_D f(x)$$

b) Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) > m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

$$\text{Kí hiệu } m = \min_D f(x)$$

Ví dụ 1:

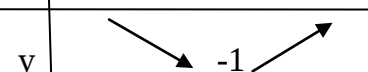
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$

Giải:

$$D = \mathbb{R}$$

$$y' = 2x - 4$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y			

$$\text{Vậy } \min_R f(x) = -1$$

II. CÁCH TÍNH GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

1. Định lý

Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

2. Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn

Quy tắc 1:

1. Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
2. Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$

3. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có

$$M = \min_{[a;b]} f(x) ; \quad m = \min_{[a;b]} f(x)$$

Ví dụ 2: Tìm GTLN của hàm số $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ trên $[-1;1]$

Giải

$$D=R$$

$$f'(x) = \frac{-8x}{(1+x^2)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(0) = 4$$

$$f(1) = 2$$

$$f(-1) = 2$$

$$\max f(x) = 4 \text{ trên } [-1;1] \quad \min f(x) = 2 \text{ trên } [-1;1]$$

BÀI TẬP

1. Lập bảng biến thiên và tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau:

a. $y = x^2$ trên $[-3;0]$

b. $y = \frac{x+1}{x-1}$ trên $[3;5]$

c. $f(x) = -x^3 + 3x^2$ trên $[-1;1]$

d. $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ trên $[1;3]$

2. Tìm GTLN,GTNN của hàm số:

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên $[-4;4]$

b. $f(x) = \sqrt{5-4x}$ trên $[-1;1]$

c. $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ trên $[-1;3]$

§16. TIỆM CẬN

I. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty); (-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là *đường tiệm cận ngang* (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

Ví dụ 1:

Tìm TCN của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-5}$

Giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{5}{x} \right)} = 2$$

$$\text{Hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{5}{x} \right)} = 2$$

Tiệm cận ngang $y = 2$

II. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

Định nghĩa 2. Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

Ví dụ 2: Tìm TCD của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-5}$

Giải

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x+3}{x-5} = +\infty$$

$$\text{Hoặc } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x+3}{x-5} = -\infty$$

Tiệm cận đứng $x=5$

CHÚ Ý

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(a + \frac{b}{x} \right)}{x \left(c + \frac{d}{x} \right)} = \frac{a}{c}$$

suy ra TCN $y = \frac{a}{c}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{d}{c}^+} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow \frac{d}{c}^-} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty$$

suy ra TCD $x = -\frac{d}{c}$

BÀI TẬP

1. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số

a. $y = \frac{-x+7}{x+1}$

b. $y = \frac{2x-5}{5x-2}$

c. $y = \frac{2-x}{9-x^2}$

§17. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

I. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Tập xác định

Tìm tập xác định của hàm số

2. Sự biến thiên

• Xét chiều biến thiên của hàm số:

+ Tính đạo hàm y' ;

+ Tìm các điểm tại đó đạo hàm y' bằng 0 hoặc không xác định ;

+ Xét dấu đạo hàm y' và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

• Tìm cực trị.

• Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).

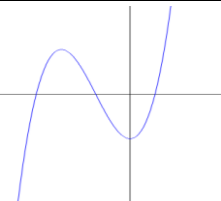
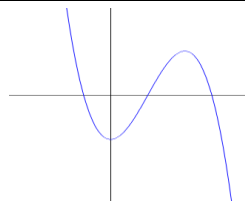
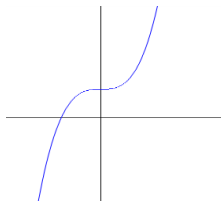
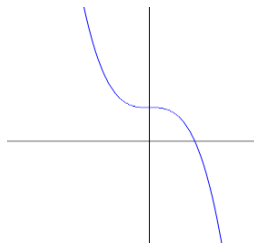
• Lập bảng biến thiên (Ghi các kết quả tìm được vào bảng biến thiên).

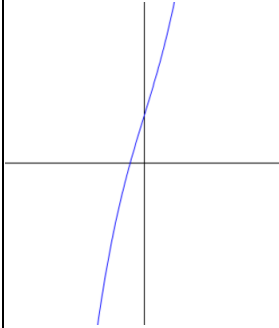
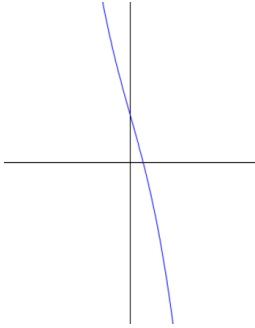
3. Đồ thị

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.

II. KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC VÀ HÀM PHÂN THỨC

1. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y''=0$ có hai nghiệm phân biệt		
Phương trình $y''=0$ có nghiệm kép		

Phương trình $y''=0$ vô nghiệm		
--------------------------------------	---	--

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$

Giải

TXĐ : $D=\mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -4$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) = +\infty$$

BBT

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\searrow$ -4	$\nearrow$	$+\infty$

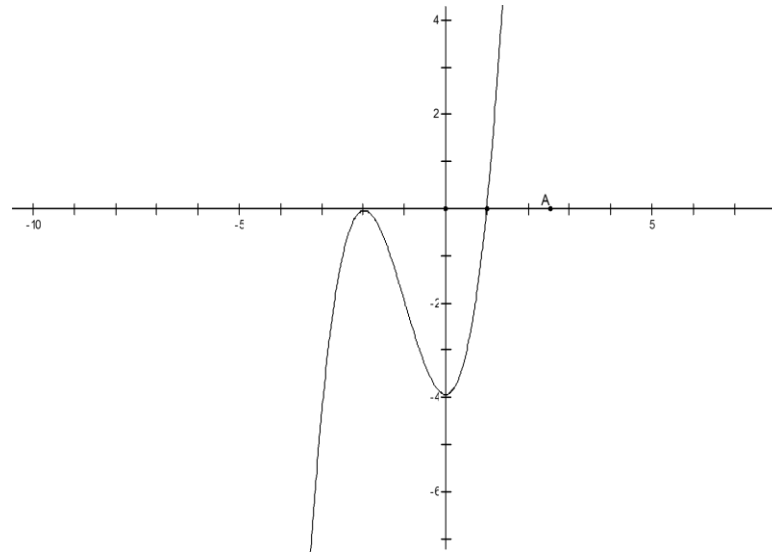
Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên $(-2; 0)$

Hàm số đạt CĐ tại $x = -2$; $y_{CD}=0$

Hàm số đạt CT tại $x = 0$; $y_{CT}= -4$

x	-3	-1	1
y	-4	-2	0



Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

$$y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$$

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = -3x^2 + 6x - 4$$

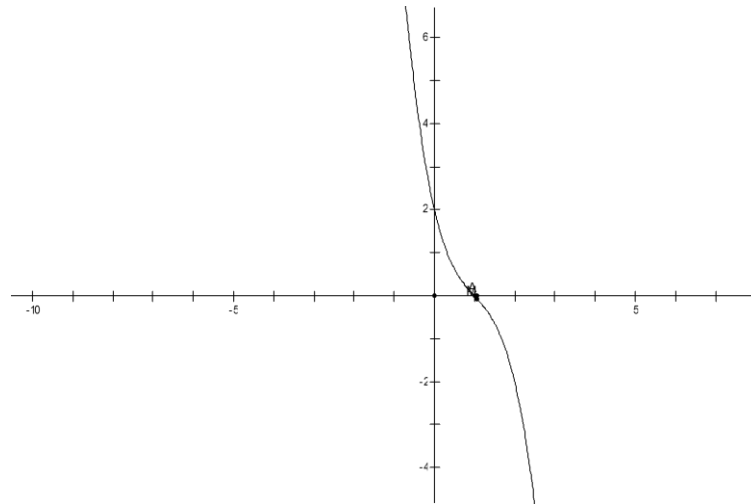
$$y' < 0, \forall x \in D$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$$

BBT

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	-	
y	$+\infty$	$-\infty$

Điểm đặc biệt: (1; 0); (0; 2)



2. Hàm số bậc bốn $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y''=0$ có ba nghiệm phân biệt		
Phương trình $y''=0$ có một nghiệm		

Ví dụ 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$

Giải:

Txđ: $D=\mathbb{R}$

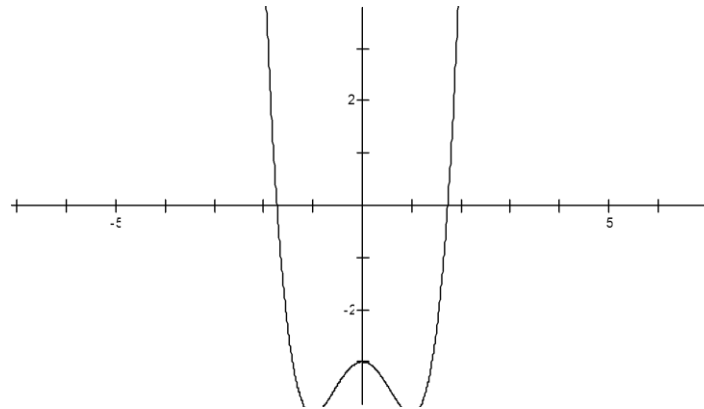
$$y' = 4x^3 - 4x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ y = -4 \\ y = -4 \end{cases}$$

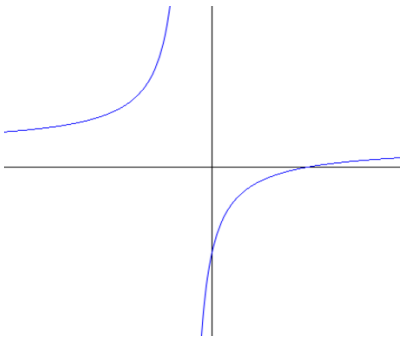
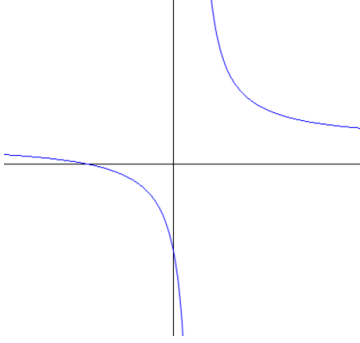
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right) = +\infty$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$



4. Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0; ad - bc \neq 0)$

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Sự biến thiên:

$$y' = \frac{-4}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \neq 1$$

Suy ra hàm số luôn nghịch biến trên $(-\infty, 1); (1, +\infty)$

Hàm số không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{x-1} = -\infty$$

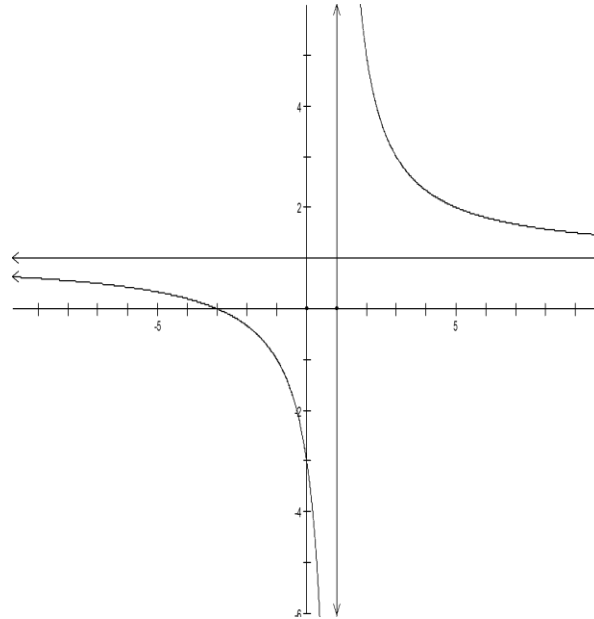
Suy ra $x=1$ là TCD.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$$

Suy ra $y=1$ là TCN.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

Đồ thị:



Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1-2x}{2x-4}$

Giải:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-2x+1}{2x-4}$$

TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

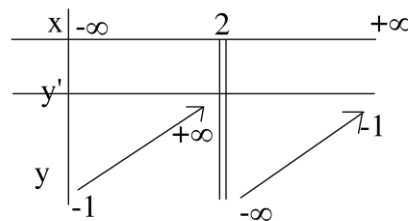
Sự biến thiên:

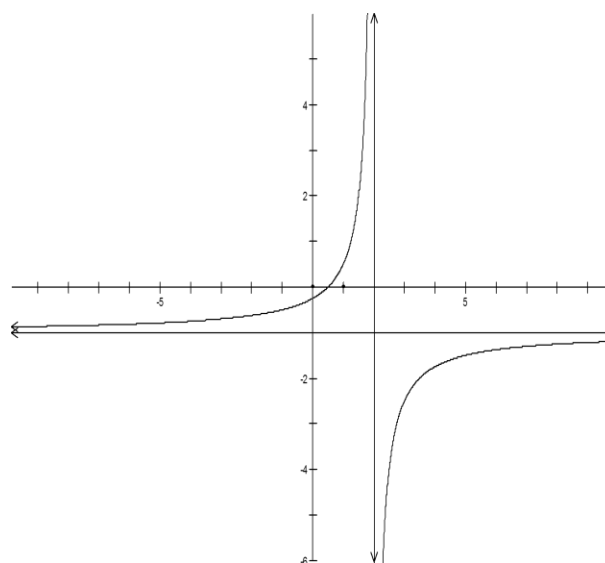
$$y' = \frac{6}{(2x-4)^2} > 0 \quad \forall x \neq 2$$

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty, 2); (2, +\infty)$

$x=2$ là tiệm cận đứng

$y=-1$ là tiệm cận ngang





III. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA CÁC ĐỒ THỊ

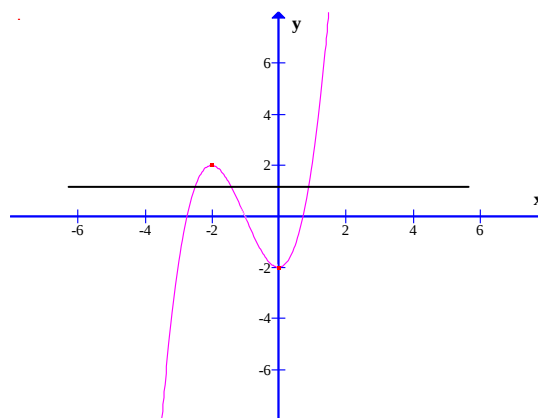
Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là (C_2) . Để tìm hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) , ta phải giải phương trình $f(x) = g(x)$.

Giả sử phương trình trên có các nghiệm là $x_0, x_1, x_2 \dots$. Khi đó, các giao điểm của (C_1) và (C_2) là $M_0(x_0, f(x_0)), M_1(x_1, f(x_1)), \dots$

Ví dụ:

a. Vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$

Giải:



b/ Sử dụng đồ thị biện luận số nghiệm của pt : $x^3 + 3x^2 - 2 = m$

Giải:

Số nghiệm của pt bằng số giao điểm của đồ thị hs $y = x^3 + 3x^2 - 2$ và đường thẳng $y = m$.

$m > 2$: phương trình có một nghiệm

$m = 2$: phương trình có hai nghiệm

$-2 < m < 2$: phương trình có 3 nghiệm

$m = -2$: phương trình có hai nghiệm
 $m < -2$: phương trình có một nghiệm

BÀI TẬP

1. khảo sát đồ thị hàm số bậc ba sau:

$$a. y = 2 + 3x - x^3$$

$$b. y = -x^3 + 4x^2 - 4x$$

$$c. y = x^3 + x^2 + 9x$$

$$d. y = 2x^3 + 5$$

2. khảo sát đồ thị hàm số bậc bốn sau:

$$a. y = -x^4 + 8x^2 - 1$$

$$b. y = x^4 - 2x^2 + 2$$

$$c. y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{3}{2}$$

$$d. y = 2x^2 - x^4$$

3. khảo sát đồ thị hàm phân thức sau:

$$a. y = \frac{x+3}{x-1}$$

$$b. y = \frac{1-2x}{2x-4}$$

$$c. y = \frac{-x+2}{2x+1}$$

4. Khảo sát đồ thị hàm số. Từ đó tìm số nghiệm của các phương trình sau:

$$a) x^3 - 3x^2 + 5 = 0$$

$$b) -2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$c) 2x^2 - x^4 = -1$$

5.a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$

b. Dựa vào đồ thị hàm số, biện luận về số nghiệm của phương trình sau theo tham số m : $x^3 - 3x + m = 0$

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

1. Tìm khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

$$a) y = -x^3 + 2x^2 - x - 7$$

$$b) y = \frac{x-5}{1-x}$$

2. Tìm cực đại, cực tiểu của hàm số sau:

$$y = x^4 - 2x^2 + 2$$

3. Tìm tiệm đứng và tiệm cận ngang của hàm số sau:

$$y = \frac{2x+3}{2-x}$$

4. Khảo sát các hàm số sau:

$$a) y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$$

$$b) y = x^3 + 3x^2 + 1$$

Dựa vào đồ thị hàm số, biện luận số nghiệm của phương trình sau:

$$x^3 + 3x^2 + 1 = \frac{m}{2}$$

